Parcours Interuniversitaire de Physique
Option de L3
Ecole Normale Supérieure de Paris

Introduction à l'astrophysique

Steven Balbus
François Levrier

Septième TD

7 novembre 2008

I - Précession du périhélie de Mercure

L'orbite de la planète Mercure précesse lentement au cours du temps. Son périhélie avance au rythme de 574,8 secondes d'arc par siècle. Une partie de cette avance est liée à l'influence des autres planètes, mais totus corrections faites, il manquait désespérément 43 secondes d'arc par siècle. Cet écart ne pouvait être expliqué par la présence d'une hypothétique planète interne à l'orbite de Mercure, car cette planète Vulcain, du nom que lui avait attribué Le Verrier au XIX$^{\text{è}}$ siècle, aurait dû être observée au cours d'éclipses de Soleil, ce qui n'a jamais été le cas. C'est la relativité générale qui a permis de résoudre le problème.

1. On se place, dans cette question, dans le cadre classique. On note M la masse du Soleilet on pose $\alpha = GM$. En notant $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur repérant la position de Mercure et $\boldsymbol{v}$ sa vitesse, montrer que le vecteur $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$ est constant. Exprimer son module σ en coordonnées polaires, et donner son interprétation géométrique. Montrer que la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\alpha}{\sigma^2} \quad \text{avec } u = \frac{1}{r} \quad \text{et en déduire que} \quad r = r_0(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_p)},$$

où p est le paramètre de la cônique, e son excentricité et θ_p l'argument du périhélie. On peut choisir l'origine des angles de telle manière que $\theta_p = 0$, ce qu'on supposera par la suite.

2. En relativité générale, on montre que cette équation du mouvement devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\alpha}{\sigma^2} + \frac{3\alpha}{c^2} u^2 \quad \text{avec } c \text{ la vitesse de la lumière.}$$

Justifier que cette équation admet la limite classique correcte.

3. La résolution de cette équation n'est pas possible exactement, mais le terme correctif étant faible, on peut donc trouver une solution par une approche perturbative. On note u_0 la solution classique, et on cherche la solution u sous la forme $u = u_0 + u_1$ avec $u_1 \ll u_0$. Montrer que u_1 est solution de l'équation différentielle approchée

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\theta^2} + u_1 = \frac{3\alpha^3}{c^2\sigma^4}\left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e\cos\theta + \frac{e^2}{2}\cos 2\theta\right).$$

4. Résoudre cette équation en cherchant une solution $u_1(\theta) = A + B\theta\sin\theta + C\cos 2\theta$. Déterminer les coefficients A, B et C, et en déduire l'expression de $u(\theta)$.

5. Justifier que sur des temps assez longs, on peut ne conserver qu'un seul des trois termes de la perturbation u_1. On considèrera ensuite que la solution u correspondante est "exacte". Estimer l'ordre de grandeur du paramètre $\epsilon = 3(\alpha/c\sigma)^2$ dans le cas de Mercure :

$$a = 0,38709893 \text{ UA} = 57909175 \text{ km} \qquad T = 0,2408 \text{ an} \qquad e = 0,20523069$$

En considérant les orbites telles que $\theta \ll \epsilon^{-1}$, montrer que l'on peut écrire la solution approchée $r(\theta)$ comme

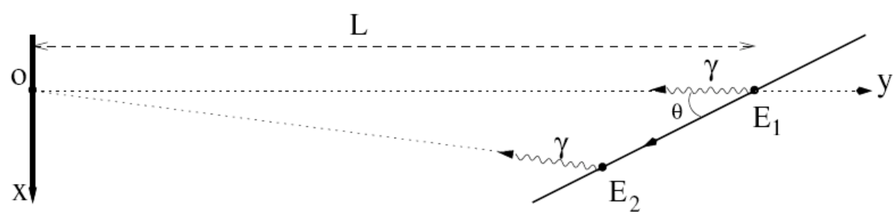
$$r(\theta) \simeq \frac{p}{1 + e\cos\left[\theta(1-\epsilon)\right]}$$

6. En déduire que le périhélie précesse avec une vitesse angulaire qu'on exprimera en fonction de G, M, c et des paramètres de l'orbite classique (demi-grand axe a, période T et excentricité e). Faire l'application numérique et conclure.

II - Vitesses supra-luminiques

En 1977, les astrophysiciens détectent le rayonnement synchrotron émis par un jet d'électrons relativistes issu du quasar 3C273. Le suivi de ce jet sur la sphère céleste montre un déplacement de 0,0022 secondes d'arc par an, ce qui implique une vitesse apparente $v_a = 10\ c$, la source étant située à une distance $L \sim 600$ Mpc. Cette observation semble donc remettre en cause le postulat relativiste selon lequel la vitesse de la lumière est une limite absolue.

1. Pour résoudre ce paradoxe, considérons le modèle simple suivant



Un astrophysicien O observe le mouvement d'une particule P située à une distance L de O. La particule parcourt une droite faisant un angle θ avec Oy, à vitesse v constante. Lorsque P coupe l'axe Oy, elle émet un premier photon (évènement E_1). Après un temps Δt, elle en émet un second (évènement E_2). En déterminant les instants de réception des photons en O, déterminer la vitesse apparente v_a de P vue par O. On mettra le résultat sous la forme

$$\frac{v_a}{c} = F(\beta,\theta) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c},$$

et l'on supposera bien entendu que $L \gg v\Delta t$.

2. Dans un modèle plus réaliste, la particule P suit une trajectoire $\boldsymbol{r}(t)$ à la vitesse $\boldsymbol{v}(t)$, et elle émet des photons continuellement. L'observateur O reçoit donc des photons à chaque instant. On note t_e l'instant d'émission du photon reçu en O à l'instant t_r. Quelle est l'équation implicite vérifiée par la fonction $t_e(t_r)$? Justifier l'unicité de la solution.

3. Le photon émis par P à l'instant t_e arrive donc en O à l'instant t_r, depuis une direction portée par le vecteur unitaire

$$\boldsymbol{n}(t_e) = -\frac{\boldsymbol{r}(t_e)}{||\boldsymbol{r}(t_e)||}.$$

Montrer que la vitesse apparente s'écrit

$$v_a(t_r) = \frac{||\boldsymbol{v}(t_e) \wedge \boldsymbol{n}(t_e)||}{1 - \dfrac{\boldsymbol{v}(t_e).\boldsymbol{n}(t_e)}{c}}.$$

4. Revenant à la question **1.**, déterminer le maximum de la fonction $F(\beta,\theta)$ à β constant, et conclure sur l'observation de vitesses "supra-luminiques".